הצגה מטריציונית של טרנספורמציות לינאריות, מטריצת מעבר

הגדרה: יהי T אופרטור לינארי על מרחב וקטורי V מעל שדה K, ויהי $S=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בסיס של V. מתקיים

$$
\begin{aligned}
&T(u_1)=a_{11}u_1+a_{12}u_2+\Lambda+a_{1n}u_n\\
&T(u_2)=a_{21}u_1+a_{22}u_2+\Lambda+a_{2n}u_n\\
&\mathrm{M}\\
&T(u_n)=a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+\Lambda+a_{nn}u_n
\end{aligned}
$$

השחלוף של מטריצת המקדמים הנ"ל נקראת *ההצגה המטריצית של* T ביחס לבסיס S. ונרשום,

$$
[T]_S=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & . & . & . & . & a_{n1}\\
a_{12} & a_{22} & . & . & . & . & a_{n2}\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & . & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

עמודות $[T]_S$ הן וקטורי הקואורדינטות $[T(u_1)]_S,[T(u_2)]_S,\ldots\ldots,[T(u_n)]_S$.

משפטים:

$T:V\longrightarrow V$ אופרטור לינארי $S=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בסיס של V ו- $S'=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ בסיס אחר של V.

P מטריצת המעבר מבסיס S לבסיס S'

P הפיכה ו- P^{-1} היא מטריצת המעבר מבסיס S' לבסיס S.

$$
\begin{aligned}
&[T]_S[v]_S=[T(v)]_S\\
&P[v]_{S'}=[v]_S\\
&P^{-1}[v]_S=[v]_{S'}\\
&[T]_{S'}=P^{-1}[T]_S\,P
\end{aligned}
$$

נהוג לסמן $[T]_E$ את המטריצה המיצגת של הטרנספורמציה בבסיס הסטנדרטי.

משפטים:

אופרטור לינארי T על מרחב וקטורי V נקרא ניתן ללכסון (או לכסין), אם T ניתן להצגה על ידי מטריצה אלכסונית D.

הגדרה: אומרים שמטריצה A *ניתנת ללכסון (לכסינה)*, אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.

נניח כי A היא הצגה מטריצית של אופרטור T. אזי T לכסין אם ורק אם A לכסינה.

לכן, החקירה של לכסון אופרטור מצטמצמת ללכסון המטריצה המיצגת של האופרטור.
(ובכך מטפלים בפרק של ערכים עצמיים).

תרגילים:

1. (18 נקודות)

יהי $P_2(x)$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה 2 עם מקדמים ממשיים, ויהי $F=\{f_1=1, f_2=1+x, f_3=1+x+x^2\}$ בסיס של $P_2(x)$.

נתון ש: $T:P_2(x)\to P_2(x)$ אופרטור לינארי כך שהצגתו המטריצית לפי בסיס F היא $[T]_F=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

א. מצא את מטריצת המעבר P מהבסיס $E=\{e_1=1, e_2=x, e_3=x^2\}$ לבסיס F.

ב. מצא את הצגת T לפי הבסיס E.

ג. מצא את $T(-x^2+3x+4)$.

פתרון:

א.

$$f_1=1=e_1$$
$$f_2=1+x=e_1+e_2$$
$$f_3=1+x+x^2=e_1+e_2+e_3$$
$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ב. $P[T]_F P^{-1}=[T]_E$. ניקח את P שמצאנו קודם ונהפוך אותה.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P[T]_F P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ג. ניתן למצוא את הפתרון בשתי דרכים באמצעות אחד משני הבסיסים.
נביא כאן את שתי הדרכים.

לפי בסיס E:

$$T(1)=0$$
$$T(x)=x+1$$
$$T(x^2)=2x^2+2x$$

ואז מתקיים

$$T(-x^2+3x+4)=-T(x^2)+3T(x)+4T(1)=-2x^2-2x+3x+3=-2x^2+x+3$$

לפי בסיס F:

$$-x^2+3x+4=af_1+bf_2+cf_3$$
$$-x^2+3x+4=a+b+bx+c+cx+cx^2$$
$$\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\b=4\\a=1\end{cases}$$

ולכן,

$$T(-x^2+3x+4)=T(f_1)+4T(f_2)-T(f_3)$$
$$T(-x^2+3x+4)=0+4f_2-(-2f_1+f_2+2f_3)=2f_1+3f_2-2f_3=3+x-2x^2$$

2. יהי $P_2(x)$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה 2 עם מקדמים ממשיים, ונגדיר ט״ל באופן הבא $T(v)=(x+1)v'(x)$.

א. יש למצוא את $[T]_E$.

ב. יש למצוא את $[T]_F$ כאשר $F=\{(x+1)^2,x+1,1\}$.

ג. יש למצוא את מטריצות המעבר P ו- P^{-1}.

ד. יש להראות קיום של הנוסחאות בפרק זה.

פתרון: כדי למצוא ייצוג מטריצי של טרנספורמציה בבסיס מסוים, מפעילים את הטרנספורמציה על אברי הבסיס ואת התוצאה רושמים כצרוף לינארי של אברי אותו בסיס. וקטורי הקואורדינטות, שהם מקדמי הצרוף הלינארי, הם עמודות המטריצה המיצגת.

א.

$$T(x^2)=(x+1)\cdot 2x=2x^2+2x+0$$
$$T(x)=(x+1)\cdot 1=0x^2+x+1$$
$$T(1)=(x+1)\cdot 0=0x^2+0x+0$$
$$[T]_E=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

ב.

$$T\left((x+1)^2\right)=(x+1)\cdot 2(x+1)=2(x+1)^2+0(x+)+0\cdot 1$$
$$T(x+1)=(x+1)\cdot 1=0\cdot(x+1)^2+(x+1)+0\cdot 1$$
$$T(1)=(x+1)\cdot 0=0(x+1)^2+0(x+1)+0\cdot 1$$

ולכן $[T]_F=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

ג. P מטריצת המעבר מ-E ל-F. כלומר, ע"י צרוף לינארי של אברי E נוכל להגיע ל-F. את מקדמי הצרוף נשים בעמודות מטריצה וזו תהיה P.

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$(x+1)=0x^2+x+1$$
$$1=0x^2+0x+1$$
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

כדי למצוא את P^{-1} אפשר להפוך את P או למצוא אותה באופן ישיר מצרוף לינארי של אברי בסיס F כדי להגיע לבסיס E.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

ד. יהא v איבר כללי במרחב. נרשום אותו כצרוף לינארי של אברי בסיס F כדי לקבל את $[v]_F$.

$$ax^2+bx+c=\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma\cdot 1$$
$$ax^2+bx+c=\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta+\gamma)\cdot 1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a\\\beta=b-2a\\\gamma=c-b+a\end{cases}$$
$$[v]_F=\begin{pmatrix}a\\b-2a\\a-b+c\end{pmatrix}$$

נמצא כעת את $[T(v)]_F$:

$$T(v)=T\left(ax^2+bx+c\right)=(x+1)(2ax+b)=2ax^2+(2a+b)x+b$$
$$2ax^2+(2a+b)x+b=\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma\cdot 1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2a\\ \beta=b-2a\\ \gamma=0\end{cases}$$

ולכן $\left[T(v)\right]_F=\begin{pmatrix}2a\\ b-2a\\ 0\end{pmatrix}$.

מתקיים $[T]_F[v]_F=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b-2a\\ a-b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\ b-2a\\ 0\end{pmatrix}=\left[T(v)\right]_F$.

3. יהי V מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה 2. מצא את המטריצה המיצגת את אופרטור הגזירה $D\left(f\right)=f'$ לפי הבסיס $p_1=1, p_2=x+1, p_3=x^2+x$.

פתרון:

$$T(1)=0=0p_1+0p_2+0p_3$$
$$T(x+1)=1=1p_1+0p_2+0p_3$$
$$T\left(x^2+x\right)=2x+1=-1p_1+2p_2+0p_3$$
$$\Rightarrow[T]_p=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

4. (18 נקודות)

תהי $T:R^3\to R^3$ אופרטור לינארי שהצגתו ביחס לבסיס $S=\left\{s_1=(1,1,0),s_2=(1,0,2),s_3=(1,1,2)\right\}$ הוא $[T]_S=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

א. עבור הוקטור $v=(0,1,-1)$ ב-R^3 חשב את $T(v)$.

ב. מצא בסיס ומימד לגרעין של T.

ג. מצא בסיס ומימד לתמונה של T.

פתרון:

א. $[T]_S[v]_S = [T(v)]_S$

$$[v]_S:\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}0 = a+b+c \\ 1 = a+c \\ -1 = 2b+2c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2}\end{cases}$$

ולכן,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ -\frac{3}{2} \\ 0\end{pmatrix}_S$$

$$2s_1 - \frac{3}{2}s_2 + 0s_3 = \begin{pmatrix}2 & 2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -3\end{pmatrix}_E$$

ב. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$. ולכן, $\begin{cases}x+3z=0 \\ 2y+z=0\end{cases}$ והבסיס יהיה $\begin{pmatrix}-6, & -1, & 2\end{pmatrix}$ לפי בסיס S. נעביר זאת לבסיס E:

$$-6s_1 - s_2 + 2s_3 = \begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & -4 & 2\end{pmatrix}_E.$$

ג. אפשר לבחור כבסיס למרחב התמונה את עמודות המטריצה (כתמונות של אברי בסיס), לדרג אותן ולעבור לבסיס E.

העמודות הבת"ל תהיינה $\left\{\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$ ונקבל, $s_1, 2s_2$ והבסיס לפי E יהיה $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 4\end{pmatrix}\right\}$.

5. תהא $T:R^4 \to R^4$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

א. יש למצוא את המטריצה המיצגת של T ביחס לבסיס

$$F = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ב. יש לחשב את וקטור הקואורדינטות של $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ בבסיס F.

פתרון:

א.

$$T(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 + f_3 \qquad T(f_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_3 \qquad T(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad T(f_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן, $[T]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. ניתן לחשב זאת בשתי דרכים $[T]_f [v]_f$ או $[T(v)]_f$.

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_f = f_1 + 2f_3 \Rightarrow [T(v)]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. הראה כי $T(x,y,z)=(x-3y-2z,y-4z,z)$ הפיכה ומצא את $T^{-1}(x,y,z)$.

פתרון:

$[T]_E=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$. המטריצה שהתקבלה היא מדורגת לכן שורותיה בת"ל ולכן היא הפיכה. כלומר, קיימת טרנספורמציה הפוכה. המטריצה ההופכית של המטריצה הנ"ל תהיה המטריצה המיצגת של הטרנספורמציה ההפוכה.

$$[T]_E^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&14\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z)=(x+3y+14z,y+4z+z)$$

7. נתון כי המטריצה המיצגת של ההעתקה $T:R^2\longrightarrow R^2$ בבסיס $B=\{(1,2),(2,1)\}$ היא $\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}\right]_B$. יש למצוא את $T(1,1)$.

פתרון:

$$(1,1)=\frac{1}{3}(1,2)+\frac{1}{3}(2,1)$$
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}_B\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_B=1(1,2)+2(2,1)$$
$$T(1,1)=(5,4)$$

8. יהי $\{e_1,e_2\}$ בסיס של V. $T:V\longrightarrow V$ כך ש:

$$T(e_1)=3e_1-2e_2 \qquad\qquad T(e_2)=e_1+4e_2$$

$\{f_1=e_1+e_2,f_2=2e_1+3e_2\}$ בסיס אחר. יש למצוא את $[T]_f$.

פתרון:

$$T(f_1) = T(e_1) + T(e_2) = 4e_1 + 2e_2 = \alpha f_1 + \beta f_2$$
$$T(f_2) = 2T(e_1) + 3T(e_2) = 9e_1 + 8e_2 = \gamma f_1 + \delta f_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 11 \\ \delta = -1 \end{cases}$$
$$[T]_f = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

9. נתון כי $T: F^{2\times 2} \longrightarrow F^{2\times 2}$ כך ש $T^2 = 0$.

אזי $T = 0$ או קיים בסיס ב- $F^{2\times 2}$ שבו המטריצה המיצגת של T היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון: נניח כי $T \neq 0$ אז קיים $v \in V$ כך ש $T(u) = v \neq 0$.

א. נוכיח כי u,v בת"ל.

נניח כי קיים צרוף לינארי $\alpha u + \beta v = 0$ ונראה כי המקדמים $\alpha = \beta = 0$.

$$0 = T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$
$$0 = \alpha v + \beta T(v)$$
$$0 = \alpha v + \beta T^2(u)$$

נתון כי $T^2 = 0$ וכן כי $v \neq 0$ לכן,

$$\alpha = \beta = 0$$

ב. נוכיח כי המטריצה המיצגת $[T]_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$T(v) = T^2(u) = 0$$
$$T(u) = 1 \cdot v + 0 \cdot u$$
$$\Rightarrow [T]_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$